Шановні семикласники!

Ви починаєте вивчати одну з найважливіших математичних дисциплін – алгебру. Допоможе вам у цьому підручник, який ви тримаєте в руках.

Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на текст, надрукований **жирним** шрифтом. Його треба запам'ятати.

У підручнику використано такі умовні позначення:

– треба запам'ятати; – вправи для повторення;

– запитання і завдання до вивченого матеріалу;

117 – завдання для класної роботи;

225 – завдання для домашньої роботи;

– вправи підвищеної складності;

– рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих».

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки 4 починаються вправи високого рівня.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – «Завдання для перевірки знань за курс алгебри 7 класу». «Задачі підвищеної складності» допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики. Пригадати раніше вивчені теми допоможуть «Відомості з курсу математики 5–6 класів» та «Вправи на повторення курсу математики 5–6 класів».

Автор намагався подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках та під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів ви знайдете в рубриці «А ще раніше...».

Бажаємо успіхів в опануванні курсу!

Шановні вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках, факультативних, індивідуальних, додаткових заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, диференціації навчання тощо.

«Вправи на повторення курсу математики 5–6 класів» допоможуть діагностувати вміння й навички учнів з математики за попередні роки та повторити навчальний матеріал.

Додаткові вправи у «Завданнях для перевірки знань» призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Правильне їх розв'язання вчитель може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад, під час узагальнюючих уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

«Задачі підвищеної складності», які розміщено в кінці підручника, допоможуть підготувати учнів до різноманітних математичних змагань та підвищити їхню цікавість до математики.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, необхідно запропонувати їй самостійно опрацювати матеріал цих уроків за підручником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього необхідно розв'язати вправи, що посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж опрацювання дитиною курсу алгебри 7 класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Якщо ваша дитина виявляє підвищену цікавість до математики та бажає поглибити свої знання, зверніть увагу на «Задачі підвищеної складності», які розміщено в кінці підручника.

Розділ 1.
Цілі вирази

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте**, що таке числові і буквені вирази, вирази зі степенями, значення виразу;
- **ознайомитеся** з поняттями одночлена і многочлена, тотожності, тотожно рівних виразів;
- **навчитеся** виконувати арифметичні дії з одночленами і многочленами, тотожні перетворення виразів, застосовувати формули скороченого множення і властивості степенів, розкладати многочлени на множники.

§ 1. ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННИМИ. ЦІЛІ РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. ЧИСЛОВЕ ЗНАЧЕННЯ ВИРАЗУ

Числові вирази утворюють із чисел за допомогою знаків дій і дужок. Наприклад, числовими виразами є:

$$12 \cdot 3 - 9;\ \ 1{,}2^3;\ \ 5\frac{1}{7} - \left(5{,}7 : 3 + 1\frac{7}{9}\right) \text{ тощо.}$$

Число, що є результатом виконання всіх дій у числовому виразі, називають ***значенням виразу***.

Оскільки $12 \cdot 3 - 9 = 36 - 9 = 27$, то число 27 є значенням числового виразу $12 \cdot 3 - 9$.

Якщо числовий вираз містить дію, яку неможливо виконати, то кажуть, що вираз не має смислу (змісту). Наприклад, вираз $5 : (8 : 2 - 4)$ не має смислу, бо $8 : 2 - 4 = 0$ і наступну дію $5 : 0$ виконати неможливо.

Окрім числових виразів, у математиці зустрічаються вирази, що містять букви. Такі вирази ми називали буквеними.

Приклад 1. Нехай необхідно знайти площу прямокутника, довжина якого дорівнює 10 см, а ширина – b см.

За формулою площі прямокутника маємо: $S = 10b$. Якщо, наприклад, $b = 3$, то $S = 30$, а якщо $b = 7$, то $S = 70$. У виразі $10b$ буква b може набувати різних значень, тобто її значення можна змінювати. При цьому буде змінюватися і значення виразу $10b$. Оскільки значення b може змінюватися (набувати різних, у даному випадку додатних значень), то букву b в такому виразі називають *змінною*, а сам вираз $10b$ – *виразом зі змінною*.

Наприклад, вирази $5 + a$; $2(b - 3x)$; $\dfrac{c-5p}{d}$ є ***виразами зі змінними***.

Вирази зі змінними утворюють із чисел та змінних за допомогою знаків арифметичних дій і дужок.

Якщо у вираз зі змінними замість змінних підставимо певні числа, то одержимо числовий вираз. Його значення називають ***числовим значенням виразу*** для вибраних значень змінних.

Приклад 2. Знайти значення виразу:

1) $(5 + b) : 4$, якщо $b = 0$; -2; 2) $\dfrac{a-c}{12}$, якщо $a = 17$, $c = -5$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Якщо $b = 0$, то $(5 + b) : 4 = (5 + 0) : 4 = 1{,}25$; якщо $b = -2$, то $(5 + b) : 4 = (5 + (-2)) : 4 = 0{,}75$.

2) Якщо $a = 17$, $c = -5$, то $\dfrac{a-c}{12} = \dfrac{17-(-5)}{12} = \dfrac{22}{12} = 1\dfrac{5}{6}$.

Вираз, який містить лише дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня, називають ***раціональним виразом***. Наприклад, раціональними є вирази:

$$2a - m; \quad \frac{p+2q}{9}; \quad -\frac{2}{3}(x-9+y); \quad \frac{5+x}{m}; \quad \frac{17}{x^2-3}; \quad a+b-\frac{1}{c}.$$

Раціональний вираз, який не містить ділення на вираз зі змінною, називають ***цілим раціональним виразом***. Якщо в раціональному виразі є ділення на вираз зі змінною, його називають ***дробовим раціональним виразом***. Три перших з поданих вище виразів – цілі, а три останніх – дробові.

Вирази зі змінними використовують для запису формул.

Наприклад, $s = vt$ – формула відстані; $P = 2(a + b)$ – формула периметра прямокутника; $n = 2k$ (де k – ціле число) – формула парного числа; $n = 2k + 1$ (де k – ціле число) – формула непарного числа; $n = 7k$ (де k – ціле число) – формула числа, кратного числу 7.

Вирази, що не є раціональними, розглядатимемо в старших класах.

А ще раніше...

Поява букв і знаків арифметичних дій у математичних записах є результатом розвитку математичної науки. У своїх працях шукане невідоме число стародавні єгипетські вчені називали «хау» (у перекладі – «купа»), а знаки математичних дій взагалі не вживали, записуючи усе переважно словами. І хоча потреба у використанні знаків математичних дій виникла ще у Стародавньому Єгипті, з'явилися вони набагато пізніше. Замість знаків додавання і віднімання стародавні математики використовували малюнки або слова, що призводило до громіздких записів.

Знаки арифметичних дій стали зустрічатися в наукових працях математиків, починаючи з XV ст. На сьогодні відомо, ким і коли було запропоновано деякі математичні знаки для записів. Так, знаки «+» і «–» зустрічаються вперше у 1489 році в праці «Арифметика» Йогана Відмана, професора Лейпцизького університету. Знак «×» для позначення дії множення введено англійським математиком Вільямом Оутредом у 1631 році. Для позначення дії ділення він використовував риску («/»). Дробову риску в математичних записах (для відокремлення чисельника дробу від його знаменника) уже в 1202 році використовував Леонардо Пізанський, відомий математик середньовічної Європи. Німецький математик, фізик і філософ Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716) запропонував використовувати у якості знака множення крапку («·»), а у якості знака ділення – двокрапку («:»). Це відбулося у 1693 році та у 1684 році відповідно. Знак рівності («=») було введено в 1557 році Робертом Рекордом, математиком, який народився в Уельсі й довгий час був особистим лікарем королівської сім'ї Великої Британії.

Величезний внесок у розвиток алгебраїчної символіки зробив у XVI ст. видатний французький математик Франсуа Вієт, якого називають «батьком» алгебри. Саме він став позначати буквами не тільки змінні, а й будь-які числа, зокрема коефіцієнти при змінних. Проте його символіка відрізнялася від сучасної. Замість x, x^2 і x^3 Вієт писав відповідно букви N (*Numerus* – число), Q (*Quadratus* – квадрат) і C (*Cubus* – куб). Наприклад, рівняння $x^3 + 7x^2 - 8x = 20$ він записував так: $1C + 7Q - 8N$ *aequ* 20 (*aequali* – дорівнює).

Франсуа Вієт
(1540–1603)

Із чого утворюють числові вирази? • Що називають значенням числового виразу? • Із чого утворюють вирази зі змінними? • Що називають числовим значенням виразу для вибраних значень змінних? • Наведіть приклад числового виразу і виразу зі змінними. • Який вираз називають цілим раціональним виразом?

1. (*Усно*) Які з наведених нижче виразів є числовими, а які – виразами зі змінними:

1) $5 + m^2 - a$;　　2) $(12 - 3) : 4$;

3) $\dfrac{5 + x}{a + b}$;　　4) $(0 - 8) \cdot 5 - 13$?

2. (*Усно*) Які з раціональних виразів є цілими, а які – дробовими:

1) $\frac{a^3 + c}{5}$; 2) $\frac{5}{a^3 + c}$; 3) $m + \frac{x}{7}$; 4) $m + \frac{7}{x}$?

3. Випишіть окремо: числові вирази; вирази зі змінними; цілі раціональні вирази; дробові раціональні вирази:

1) $5 + c$; 2) $(2 - 15) \cdot 4$; 3) $\frac{a+m}{p}$; 4) $q^2 - 19$;

5) $7 + \frac{a}{5}$; 6) $\frac{1}{4}ab$; 7) $\frac{9-5}{11}$; 8) $\frac{a^2 - b^2}{c^2}$.

4. Прочитайте словами вирази зі змінними:

1) $x + 7$; 2) $m - a$; 3) $5ab$; 4) $5 : (c + 9)$.

5. Складіть і запишіть по два вирази:

1) зі змінною a; 2) зі змінними x і y.

6. Складіть і запишіть по три вирази:

1) зі змінною x; 2) зі змінними a і b.

7. (*Усно*) Які з даних числових виразів не мають смислу:

1) $(5 - 6) : 7$; 2) $(10 - 2 \cdot 5) : 7$;

3) $4 : (12 - 2 \cdot 6)$; 4) $\frac{17}{15 + 5 \cdot (-3)}$?

2 **8.** Знайдіть значення виразу:

1) $5x - 3$, якщо $x = 1{,}8$; $x = 2\frac{1}{5}$;

2) $a^2 + 3a$, якщо $a = -1$; $a = 0{,}8$.

9. Знайдіть значення виразу:

1) $5m + 2n$, якщо $m = -1{,}3$; $n = 2\frac{1}{2}$;

2) $a(2b - c)$, якщо $a = 1{,}5$; $b = 3{,}2$; $c = -1{,}4$.

10. Знайдіть значення виразу:

1) $b^2 - 4b$, якщо $b = -2$; $b = 0{,}5$;

2) $x^2 - y^2$, якщо $x = 5$; $y = -3$; якщо $x = 0{,}1$; $y = 0{,}2$.

11. Запишіть у вигляді виразу:

1) суму чисел b і c;
2) добуток чисел $5m$ і n^3;
3) квадрат суми чисел a і $9p$;
4) різницю квадратів чисел $3d$ і $7r$.

12. Запишіть у вигляді виразу:

1) різницю чисел p і 7; 2) частку чисел $a + c$ і d;
3) суму числа a і добутку чисел m і n.

13. Заповніть у зошиті наступні таблиці:

m	2	3	–1	0	–2
n	1	2	0	–5	–3
$2m - 3n$					

x	–1	0	1	2
$x^2 + 2$				
$x^2 + 2x$				

14. Дізнайтеся прізвище видатного українського кардіохірурга. Для цього знайдіть значення виразу в першій таблиці й перенесіть букви, що відповідають знайденим значенням, у другу таблицю.

x	–2	–1	0	1	2
$x^2 - 4x$					
Букви	*О*	*А*	*В*	*М*	*С*

5	–3	12	–4	12	0

15. Порівняйте суму $a + b$ з добутком ab, якщо:

1) $a = 0$, $b = -2$; 2) $a = -3$, $b = 2$.

16. Майстер за одну годину виготовляє x деталей, а його учень – y деталей. Скільки деталей вони виготовили разом, якщо майстер працював 8 год, а учень – 4 год?

17. (*Усно*) Нехай a дм – довжина прямокутника, b дм – його ширина ($a > b$). Що означають вирази:

1) ab; 2) $2(a + b)$; 3) $2a$; 4) $\frac{a}{b}$?

18. Ручка коштує x грн, олівець – y грн ($x > y$). Що означають вирази:

1) $x + y$; 2) $3x + 4y$; 3) $x - y$; 4) $\frac{x}{y}$?

3 **19.** Запишіть у вигляді виразу час, який учень щоденно проводить у школі, якщо у нього a уроків по 45 хв, b перерв по 15 хв і c перерв по 10 хв. Обчисліть значення цього виразу, якщо $a = 6$; $b = 2$; $c = 3$.

20. Коли Марійка витягла зі своєї скарбнички всі монети, то виявилося, що там було x монет номіналом 10 коп., y монет номіналом 25 коп. і z монет номіналом 50 коп. Обчисліть, яку суму коштів назбирала Марійка, якщо $x = 8$; $y = 5$; $z = 20$.

21. При якому значенні змінної a значення виразу $5a - 8$ дорівнює -13?

22. При якому значенні x значення виразів $3x - 4$ і $-2x + 7$ рівні між собою?

23. Складіть формулу цілого числа, яке:

1) кратне числу 9;
2) при діленні на 5 дає в остачі 1.

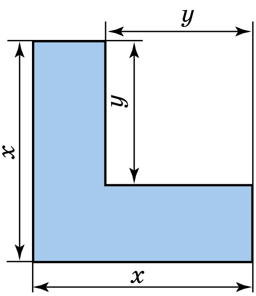
24. При деяких значеннях a і b значення виразу $a - b$ дорівнює 2,25. Якого значення при тих самих значеннях a і b набуває вираз:

1) $4(a - b)$; 2) $b - a$; 3) $\frac{1}{b-a}$; 4) $\frac{3(a-b)}{4(b-a)}$?

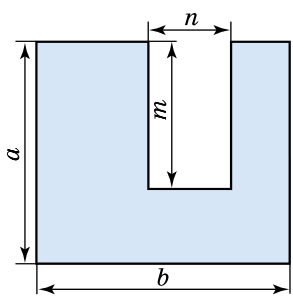
25. При деяких значеннях c і d значення виразу $c - d$ дорівнює $\frac{4}{7}$. Якого значення при тих самих значеннях c і d набуває вираз:

1) $7(c - d)$; 2) $d - c$; 3) $\frac{1}{d-c}$; 4) $\frac{5(d-c)}{4(c-d)}$?

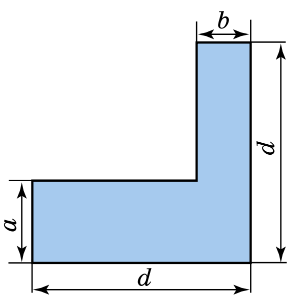
26. Складіть вирази для обчислення площ фігур (мал. 1–3):



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

Вправи для повторення

27. Обчисліть:

1) 13^2; 2) 7^3; 3) $(-2,1)^2$; 4) $(-1,1)^3$;

5) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$; 6) $\left(-1\frac{1}{5}\right)^2$; 7) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; 8) $0,2^3$.

28. Якою цифрою закінчується значення виразу:

1) 132^2; 2) 271^3; 3) 2017^2; 4) $1315^2 - 115^3$?

29. Власна швидкість катера – 26 км/год, а швидкість течії річки – 2 км/год. Знайдіть відстань між двома пристанями, якщо в одному напрямі катер проходить її на 30 хв швидше, ніж у зворотному.

Цікаві задачі для учнів неледачих

30. Чи існує таке значення x, для якого:

1) $-x \geqslant |x|$; 2) $x > |x|$?

§2. ТОТОЖНІ ВИРАЗИ. ТОТОЖНІСТЬ. ТОТОЖНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗУ. ДОВЕДЕННЯ ТОТОЖНОСТЕЙ

Знайдемо значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ для деяких даних значень змінної x. Результати запишемо в таблицю:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$2(x - 1)$	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6
$2x - 2$	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6

Можна прийти до висновку, що значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ для кожного даного значення змінної x рівні між собою. За розподільною властивістю множення відносно віднімання $2(x - 1) = 2x - 2$. Тому й для будь-якого іншого значення змінної x значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ теж будуть рівними між собою. Такі вирази називають *тотожно рівними*.

Два вирази, відповідні значення яких рівні між собою при будь-яких значеннях змінних, називають *тотожними*, або *тотожно рівними*.

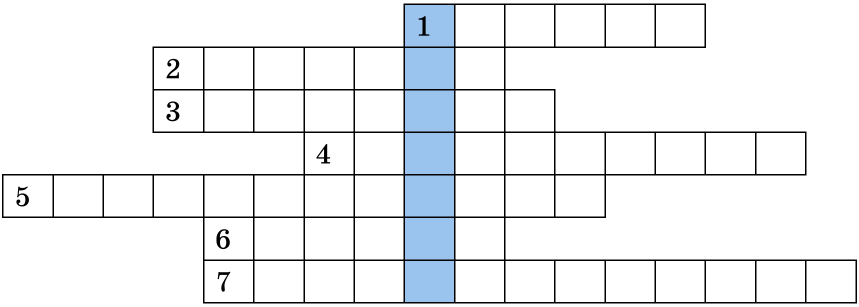
Наприклад, тотожними є вирази $2x + 3x$ і $5x$, бо при кожному значенні змінної x ці вирази набувають однакових значень (це випливає з розподільної властивості множення відносно додавання, оскільки $2x + 3x = 5x$).

Розглянемо тепер вирази $3x + 2y$ і $5xy$. Якщо $x = 1$ і $y = 1$, то відповідні значення цих виразів рівні між собою:

$$3x + 2y = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5; \qquad 5xy = 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5.$$

Цікаві задачі для учнів неледачих

185. *Видатні українці.* Запишіть по горизонталях прізвища видатних українців (за потреби використайте додаткову літературу та Інтернет) та прочитайте у виділеному стовпчику одне з фундаментальних понять математики, з яким ви ознайомитеся в наступному розділі.



1. Видатний письменник, поет, учений, публіцист.
2. Перший президент незалежної України.
3. Видатний поет і художник, літературна спадщина якого вважається основою української літератури та сучасної української мови.
4. Один з найвідоміших у світі авіаконструкторів.
5. Видатна актриса, яка першою в Україні здобула звання Народної артистки Української РСР.
6. Видатний футболіст і тренер, володар «Золотого м'яча» як найкращий футболіст Європи 1975 року.
7. Автор «Енеїди» – першого твору нової української літератури, написаного народною мовою, один із засновників нової української драматургії.

Домашня самостійна робота № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть варіант правильної відповіді.

1. Який з виразів тотожно рівний виразу $b + b + b + b$?

А) b^4; **Б)** $4 + b$; **В)** $4b$; **Г)** $\frac{b}{4}$.

2. Який з виразів є одночленом?

А) $7x - y$; **Б)** $7x + y$; **В)** $\frac{7x}{y}$; **Г)** $7xy$.

3. $a^6 : a^3 = ...$

А) a^3; **Б)** a^2; **В)** a; **Г)** 1.

4. $(-2)^3 = ...$

А) 8; **Б)** −8; **В)** −6; **Г)** 6.

5. Запишіть у вигляді виразу квадрат суми чисел m і $3a$.

А) $(m - 3a)^2$; **Б)** $m^2 + (3a)^2$; **В)** $(m + 3a)^2$; **Г)** $(m \cdot 3a)^2$.

6. Обчисліть значення виразу $2{,}5a^2$, якщо $a = -4$.

А) −40; **Б)** 40; **В)** 100; **Г)** −100.

7. При якому значенні a значення виразів $5a + 6$ і $-a + 7$ рівні між собою?

А) 6; **Б)** $-\frac{1}{6}$; **В)** $\frac{1}{6}$; **Г)** a – будь-яке число.

8. Обчисліть $\frac{9^{18}}{27^{12}}$.

А) 3; **Б)** 9; **В)** 27; **Г)** 1.

9. $\left(4mp^3\right)^2 \cdot \left(0{,}5m^7p\right)^3 = ...$

А) $\frac{1}{2}m^{23}p^9$; **Б)** $2m^8p^4$; **В)** $2m^{23}p^9$; **Г)** $2m^{12}p$.

10. Якого найбільшого значення може набувати вираз $1 - (a - 3)^2$?

А) 1; **Б)** −1; **В)** −3; **Г)** −8.

11. Яке із чисел 2^{300}; 3^{200}; 7^{100}; 25^{50} є найбільшим?

А) 2^{300}; **Б)** 3^{200}; **В)** 7^{100}; **Г)** 25^{50}.

12. Знайдіть значення виразу $8x^2y^4$, якщо $2xy^2 = -5$.

А) 25; **Б)** −50; **В)** 50; **Г)** 100.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО § 1 – § 6

1. Чи є тотожно рівними вирази:

1) $3b + 4b$ і $7b$; 2) $a + a + a$ і a^3;
3) $m + 2a$ і $2a + m$; 4) $3(x - 2)$ і $3x - 2$?

2. Подайте у вигляді степеня добуток:

1) $4 \cdot 4 \cdot 4$;

2) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$.

3. Виконайте дії:

1) x^5x^4; 2) $x^7 : x^2$.

4. Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}4 \cdot (-5)^4$; 2) $2^5 - 4^3 + (-1)^5$.

5. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $(m^3)^4 \cdot m^7$; 2) $(a^2)^7 : (a^3)^2$.

6. Запишіть вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $-0{,}3m^2np^3 \cdot 4mn^2p^7$; 2) $\left(-\frac{1}{2}p^7a\right)^3$.

7. Спростіть вираз:

1) $0{,}2a^2b \cdot (-10ab^3)^2$; 2) $\left(-\frac{1}{4}m^2n^3\right)^4 \cdot (4m^5n)^3$.

8. Доведіть тотожність: $2(a + b - c) + 3(a - c) - 2b = 5(a - c)$.

9. Порівняйте вирази:

1) 5^{12} і 25^6; 2) 2^{30} і 3^{20}.

Додаткові вправи

10. Доведіть, що сума трьох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 3.

11. Якого найменшого значення може набувати вираз:

1) $m^4 - 12$; 2) $(a + 2)^8 + 7$?

12. Відомо, що $4m^2n = 9$. Знайдіть значення виразу:

1) $12m^2n$; 2) $4m^4n^2$.

З історії математичного олімпіадного руху України

Математичні змагання є досить популярними серед школярів України. Це й індивідуальні змагання – математична олімпіада, і командні – турнір юних математиків або математичні бої. Участь у цих змаганнях надає можливість школярам долучитися до прекрасного світу цікавих і нестандартних задач, перевірити свої знання з математики, повірити у власні сили або віднайти в собі хист до математики.

Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики проходить щорічно в чотири етапи. Перший – це шкільні олімпіади, другий – районні й міські (для міст обласного підпорядкування), третій – обласні олімпіади, олімпіади міст Києва і Севастополя та Автономної Республіки Крим. Четвертий – це заключний етап, який з призерів третього етапу визначає переможців Всеукраїнської олімпіади. Саме за підсумками четвертого етапу складається перелік кандидатів до складу команди України для участі в Міжнародній математичній олімпіаді. Щоб увійти до команди, переможці четвертого етапу беруть участь у відбірково-тренувальних зборах, за підсумками яких і формується остаточний склад команди. Щороку кількість представників України на Міжнародній олімпіаді визначається залежно від її рейтингу серед інших країн-учасниць. Що вищий рейтинг, то більше учасників увійдуть до команди. Рейтинг команди залежить від результатів її виступу на Міжнародній олімпіаді, причому на рейтинг впливає та кількість балів, яку вибороли учасники за всі розв’язані на олімпіаді конкурсні задачі.

Історія математичного олімпіадного руху України розпочалася з Київських математичних олімпіад. Перша в Україні олімпіада пройшла в Києві в приміщенні Київського державного університету (нині Київський національний університет імені Тараса Шевченка) у 1935 році з ініціативи видатного українського математика Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942). Наступного року в Київській олімпіаді взяли участь і учні інших міст України. Зокрема, у 1936 році серед переможців олімпіади був харківський десятикласник Олексій Погорєлов, який згодом пов’язав свою наукову діяльність з геометрією, ставши видатним геометром, академіком Національної академії наук України та Російської академії наук, автором шкільного підручника з геометрії, за яким кілька десятиліть успішно навчалися й радянські школярі, й українські школярі після здобуття Україною незалежності. У тому ж 1936 році було започатковано районні олімпіади та проведено першу Всеукраїнську олімпіаду.

Розділ 2.
ФУНКЦІЇ

У цьому розділі ви:
- **ознайомитеся** з поняттями функції та її графіка, лінійної функції;
- **дізнаєтеся** про способи задання функцій;
- **навчитеся** знаходити область визначення і область значень деяких функцій, будувати графік лінійної функції.

§ 19. ФУНКЦІЯ. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ І ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ. СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЙ. ФУНКЦІОНАЛЬНА ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ ВЕЛИЧИНАМИ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

У житті ми часто стикаємося із залежностями між різними величинами. Наприклад, периметр квадрата залежить від довжини його сторони, площа прямокутника – від його вимірів, маса шматка крейди – від його об’єму, відстань, яку долає рухомий об’єкт, – від його швидкості та часу руху тощо.

Щоб розв’язати задачу практичного змісту, доцільно спочатку створити її *математичну модель*, тобто записати залежність між відомими і невідомими величинами за допомогою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо.

Розглянемо приклади *залежностей між двома величинами*.

Приклад 1. Нехай сторона квадрата дорівнює a см, а його периметр дорівнює P см. Для кожного значення змінної a можна знайти відповідне значення змінної P. Наприклад,

якщо $a = 5$, то $P = 4 \cdot 5 = 20$;
якщо $a = 8$, то $P = 4 \cdot 8 = 32$;
якщо $a = 1{,}2$, то $P = 4 \cdot 1{,}2 = 4{,}8$.

Тобто периметр квадрата залежить від довжини його сторони. Математичну модель цієї залежності можна записати формулою $P = 4a$.

Оскільки кожному значенню довжини сторони квадрата відповідає певне значення його периметра, то кажуть, що маємо *відповідність* між довжиною сторони квадрата і його периметром (або *залежність між змінними* a і P). При цьому вважають, що значенню $a = 5$ *відповідає* значення $P = 20$, або значення $P = 20$ є *відповідним* значенню $a = 5$.

Змінну a, значення якої вибирають довільно, називають ***незалежною змінною***, а змінну P, кожне значення якої залежить від вибраного значення a, – ***залежною змінною***.

Приклад 2. Нехай автомобіль рухається з постійною швидкістю 80 км/год. Відстань, яку він при цьому подолає, залежить від часу його руху.

Позначимо час руху автомобіля (у годинах) буквою t, а відстань, що він подолав (у кілометрах), – буквою s. Для кожного значення змінної t (де $t \geqslant 0$) можна знайти відповідне значення s. Наприклад,

якщо $t = 1{,}5$, то $s = 80 \cdot 1{,}5 = 120$;
якщо $t = 3$, то $s = 80 \cdot 3 = 240$;
якщо $t = 4{,}5$, то $s = 80 \cdot 4{,}5 = 360$.

Залежність змінної s від змінної t можна записати формулою $s = 80t$, де t є незалежною змінною, а s – залежною змінною.

У математиці, як правило, незалежну змінну позначають буквою x, а залежну змінну – буквою y. У прикладах, які ми розглянули, кожному значенню незалежної змінної відповідає *лише одне значення* залежної змінної.

Якщо кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, то таку залежність називають *функціональною залежністю,* або *функцією*.

Незалежну змінну ще називають ***аргументом***, а про залежну змінну кажуть, що вона є ***функцією*** від цього аргументу. У наших прикладах – периметр квадрата P є функцією від довжини його сторони a; відстань s, яку подолав автомобіль зі сталою швидкістю, є функцією від часу руху t. Значення залежної змінної називають ***значенням функції***.

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють *область визначення функції*; усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють *область значень функції*.

Наприклад, областю визначення функції у прикладі 1 є всі додатні числа a ($a > 0$).

Областю визначення функції у прикладі 2 є всі невід'ємні числа t, тобто $t \geqslant 0$. Область значень функції у прикладі 1 складається з усіх додатних чисел P, а область значень функції у прикладі 2 – з усіх невід'ємних чисел s, тобто $s \geqslant 0$.

Приклад 3. Функцію задано формулою $y = \dfrac{8}{x-2}$. Знайти:

1) область визначення функції;
2) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює –2; 6; 10;
3) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює –1.

Р о з в' я з а н н я. 1) Областю визначення функції є всі такі значення x, при яких дріб $\dfrac{8}{x-2}$ має зміст. Знаменник дробу дорівнює нулю при $x = 2$. Отже, областю визначення функції є всі числа, крім числа 2.

2) Якщо $x = -2$, то $y = \dfrac{8}{-2-2} = \dfrac{8}{-4} = -2$; якщо $x = 6$, то $y = \dfrac{8}{6-2} = 2$; якщо $x = 10$, то $y = \dfrac{8}{10-2} = 1$.

3) Щоб знайти x, при якому $y = -1$, треба підставити у формулу функції замість y число -1. Матимемо рівняння: $-1 = \dfrac{8}{x-2}$, коренем якого є число -6. Отже, значення $y = -1$ функція набуває при $x = -6$.

Задавати функцію можна різними способами. У прикладах, які ми розглянули, *функції задано формулами*: $P = 4a$; $s = 80t$; $y = \dfrac{8}{x-2}$. Такий спосіб задання функції є досить зручним, бо дає змогу для довільного значення аргументу знаходити відповідне значення функції, та компактним, оскільки в більшості випадків формула має короткий запис.

Трапляються й функції, які для різних значень аргументу задаються різними формулами. Розглянемо таку функцію та її запис.

Приклад 4. Нехай дано функцію

$$y = \begin{cases} 2x - 7, \text{ якщо } x \leqslant -2; \\ x^2 + 1, \text{ якщо } x > -2. \end{cases}$$

Цей запис означає, що для значень аргументу $x \leqslant -2$ значення функції обчислюються за формулою $y = 2x - 7$, а для значень аргументу $x > -2$ – за формулою $y = x^2 + 1$.

Наприклад,

якщо $x = -3$, то $y = 2 \cdot (-3) - 7 = -13$;
якщо $x = -2$, то $y = 2 \cdot (-2) - 7 = -11$;
якщо $x = 0$, то $y = 0^2 + 1 = 1$;
якщо $x = 5$, то $y = 5^2 + 1 = 26$.

Задавати функцію можна і *таблицею*. Такий спосіб задання функції називають *табличним*. Розглянемо його на прикладі.

Приклад 5. Щогодини, починаючи з восьмої і до тринадцятої, вимірювали атмосферний тиск і одержані дані заносили в таблицю:

Час t, год	8	9	10	11	12	13
Атмосферний тиск p, мм рт. ст.	753	754	756	754	753	752

Таблиця задає відповідність між часом вимірювання t і атмосферним тиском p. Ця відповідність є функцією, бо кожному значенню змінної t відповідає єдине значення змінної p. У цьому прикладі t є незалежною змінною, а p – залежною змінною. Область визначення функції складається із чисел 8; 9; 10; 11; 12; 13 (перший рядок таблиці), а область значень – із чисел 752; 753; 754; 756 (другий рядок таблиці).

Табличний спосіб задання функції зручний тим, що для знаходження значень функції не треба нічого обчислювати. Незручним є те, що таблиця, як правило, займає багато місця і може не містити саме того значення аргументу, яке нас цікавить, наприклад, якщо в першому рядку таблиці такого значення немає. Зокрема, у прикладі 5 неможливо знайти значення функції, що відповідає значенню аргументу, яке дорівнює, наприклад, 8,5 або 14.

Задавати функцію можна також висловленням. Такий спосіб задання функції називають *описовим* або *словесним*.

Приклад 6. Кожному натуральному числу поставимо у відповідність квадрат цього числа. Одержимо функцію, область визначення якої складається з усіх натуральних чисел, а область значень – з квадратів цих чисел.

Функціональні залежності, які ми розглянули у прикладах 2 і 5 є математичними моделями реальних процесів: модель руху автомобіля зі сталою швидкістю, модель вимірювання тиску протягом деякого часу.

У подальшому під час вивчення алгебри ми будемо неодноразово звертатися до математичних моделей реальних процесів.

А ще раніше...

Функція – одне з найважливіших понять сучасної математики. Залежності між різними величинами цікавили й стародавніх математиків. Зокрема, у Вавилоні було складено таблиці квадратів і кубів чисел, таблиці сум і добутків двох чисел, у Греції – знайдено співвідношення між елементами кола. У працях І. Ньютона, Р. Декарта, Г. Лейбніца, П. Ферма розглядалося багато функціональних залежностей, пов'язаних з геометрією та фізикою. Так, французькі математики П'єр Ферма (1601–1665) та Рене Декарт (1596–1650) розглядали функцію як залежність ординати точки кривої від її абсциси. Рене Декарт використовував поняття змінної величини. Термін «функція» (від латинського *functio* – виконання, звершення) для назви залежностей вперше ввів Готфрід Лейбніц (1646–1716). Він пов'язував функцію з графіками. Швейцарські математики Йоганн Бернуллі (1667–1748) та його видатний учень Леонард Ейлер (1707–1783) розглядали функцію як аналітичний вираз, тобто вираз, утворений із змінних і чисел за допомогою тих чи інших аналітичних операцій (дій). Поняття функції як залежності однієї змінної від іншої ввів чеський математик Бернард Больцано (1781–1848), а узагальнив – німецький математик Петер Густав Діріхле (1805–1859).

Найзагальніше сучасне означення функції було запропоновано в середині XX ст. Свій внесок у становлення цього поняття за радянських часів зробили математики М. Гюнтер, І. Гельфанд, С. Соболєв, Г. Шилов.

Наведіть приклади функціональної залежності однієї змінної від іншої, назвіть в них незалежну змінну і залежну. • Що називають функцією? • Що називають областю визначення функції і що – областю значень функції? • Які є способи задання функції? • Наведіть приклад функції, заданої формулою. • Наведіть приклад функціональної залежності між величинами, що є математичною моделлю реальних процесів.

1 **708.** (*Усно*) Чи залежить периметр рівностороннього трикутника від довжини його сторони? Чи є периметр цього трикутника функцією від довжини сторони трикутника? Якщо так, то задайте цю функцію формулою за умови, що сторона трикутника дорівнює a.

709. (*Усно*) Які з даних записів задають функцію? Укажіть для них незалежну змінну (аргумент) та залежну змінну:

1) $a = 5b - 7$; 2) $7 + 2x = 2x - 3$; 3) $y = \dfrac{1}{5x-7}$;

4) $20 : 5 - 4 = 0$; 5) $p = t^2 + t - 5$; 6) $2a - 5 > 3$.

710. Які з даних записів задають функцію? Укажіть для них незалежну змінну (аргумент) та залежну змінну:

1) $m = 2n^2 - 5$; 2) $y = x^3 - x^2 + 3$; 3) $30 - 20 > 7$;

4) $3x - 5 = 12 - 3x$; 5) $d = \dfrac{m^2+1}{m-1}$; 6) $12 \cdot 2 = 6 \cdot 4$.

711. (*Усно*) Площу круга знаходять за формулою $S = \pi r^2$, де r – радіус круга. Чи задає ця формула функцію? Якщо так, укажіть її аргумент та область визначення.

712. Площа прямокутника зі сторонами x см і 10 см дорівнює S. Виразіть формулою залежність S від x. Чи задає ця формула функцію?

713. Об'єм куба з ребром a см дорівнює V см^3. Виразіть формулою залежність V від a. Чи задає ця формула функцію? Знайдіть за цією формулою значення V, якщо:

1) $a = 5$; 2) $a = 7$; 3) $a = \dfrac{3}{4}$.

714. Периметр прямокутника зі сторонами x дм і 8 дм дорівнює P дм. Запишіть формулу залежності P від x. Для значень аргументу $x = 2$; 4; 5; 15 знайдіть відповідні значення функції P.

715. (*Усно*) Функцію задано формулою $y = -2x$.

1) Яка змінна є незалежною, а яка – залежною?
2) Знайдіть значення функції, що відповідають значенням аргументу –3; 0; 8.

716. Обчисліть значення функції, заданої формулою $y = 5x - 7$ для значень аргументу, що дорівнюють –2; 0; 5; 10.

717. Знайдіть значення функції, заданої формулою $y = \dfrac{20}{x}$, для значень аргументу, що дорівнюють –40; –10; 4; 5.

718. Функцію задано формулою $y = -\dfrac{6}{x}$. У таблиці наведено значення її аргументу. Заповніть таку таблицю в зошиті, обчисливши відповідні значення функції:

x	–12	–6	–5	–3	2	4	8	10
y								

719. Функцію задано формулою $y = 4x + 3$. У таблиці наведено значення її аргументу. Заповніть таку таблицю в зошиті, обчисливши відповідні значення функції:

x	–7	–5	–3	–1	2	4	6	8
y								

720. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = x^2 - 3$, для значень аргументу –3; –2; –1; 0; 1; 2.

721. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = 5 - x^2$, для значень аргументу –2; –1; 0; 1; 2; 3.

722. Потяг, рухаючись зі швидкістю 65 км/год, проходить за t год відстань s км. Задайте формулою залежність s від t. Обчисліть значення функції, які відповідають значенням аргументу, що дорівнюють 1; 2,4; 3; 5,8.

723. Кожному натуральному значенню n відповідає втричі більше за нього число N. Задайте формулою залежність N від n. Знайдіть значення функції, що відповідають значенням аргументу 2; 7; 13; 20.

724. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 2x - 7$; 2) $y = \frac{5x+7}{8}$; 3) $y = \frac{10}{x}$; 4) $y = \frac{5}{x+3}$.

725. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 3x + 8$; 2) $y = \frac{5x-3}{9}$; 3) $y = -\frac{8}{x}$; 4) $y = \frac{7}{x-5}$.

726. Знайдіть значення аргументу, при якому:

1) функція $y = -3x$ набуває значення –6; 9; 15;
2) функція $y = 5x - 1$ набуває значення –1; 4; 14.

727. Знайдіть значення аргументу, при якому:

1) функція $y = 4x$ набуває значення –8; 0; 12;
2) функція $y = 3 - 2x$ набуває значення –1; 3; 17.

728. Функцію задано таблицею:

x	–2	–1	0	1	2
y	–5	–3	–1	2	7

Знайдіть:

1) значення функції, якщо $x = -2$; 0; 1;

2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює −3; 2; 7;
3) область визначення функції;
4) область значень функції.

729. Функцію задано таблицею:

x	1	2	3	4	5
y	–2	0	2	5	7

Знайдіть:
1) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює 1; 3; 4;
2) значення аргументу, при якому $y = 0$; 5; 7;
3) область визначення функції;
4) область значень функції.

730. Функцію задано формулою $y = \frac{3}{4}x$. Заповніть порожні комірки таблиці:

x	–8		1,6		20,8		
y		–9		$-\frac{3}{8}$		$1\frac{5}{7}$	20,7

731. Функцію задано формулою $y = \frac{3}{5}x$. Заповніть порожні комірки таблиці:

x	–10		0		8,5	
y		–1,2		$\frac{3}{5}$		13,5

732. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

1) $y = \frac{5}{x^2 - 9}$; 2) $y = \frac{17}{x^2 + 4}$; 3) $y = \frac{9}{x(x-3)}$;

4) $y = \frac{7x+1}{x^2 + x}$; 5) $y = \frac{9}{(x-1)(x+4)}$; 6) $y = \frac{15}{x-2} + \frac{7}{x+3}$.

733. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{7}{x^2 - 4}$; 2) $y = \frac{13}{x^2 + 1}$; 3) $y = \frac{14}{(x+2)x}$;

4) $y = \frac{9}{x^2 - x}$; 5) $y = \frac{7}{(x+5)(x-3)}$; 6) $y = \frac{14}{x+3} + \frac{7}{x-1}$.

734. На початку нагрівання вода мала температуру 20 °C. При нагріванні температура води щохвилини підвищувалася на 5 °C.

1) Задайте формулою залежність температури води T від часу t її нагрівання.
2) Знайдіть значення T, що відповідає значенню аргументу $t = 7; 9; 10$.
3) Знайдіть значення t, яким відповідає $T = 45; 60; 70$.
4) Знайдіть значення t, при якому вода закипить.

735. Від'їхавши на відстань 10 км від міста, велосипедист зупинився. А через деякий час продовжив рух зі швидкістю 15 км/год.

1) Задайте формулою залежність відстані s (у км), яку загалом подолав велосипедист, від часу t (у год), що відраховується після зупинки.
2) Знайдіть значення s, що відповідає значенню аргументу $t = 1$; $t = 2$; $t = 5$.
3) Знайдіть значення t, яким відповідає $s = 34$; $s = 55$; $s = 70$.

736. У таблиці подано залежність функції y від аргументу x.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−3	−2	1	−3	5	1	6	−2	−3

Знайдіть:
1) значення y, якщо $x = -4; -1; 0; 3$;
2) значення x, яким відповідає $y = -3; -2; 5$;
3) значення x, якому відповідає таке саме значення y;
4) область визначення функції;
5) область значень функції.

737. У таблиці подано залежність функції y від аргументу x.

x	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
y	−1	2	4	2	4	7	2	−1	9

Знайдіть:
1) значення y, якщо $x = -8; -2; 4; 6$;
2) значення x, яким відповідає $y = -1; 4; 7$;
3) значення x, якому відповідає протилежне до x значення y;
4) область визначення функції;
5) область значень функції.

738. Складіть таблицю значень функції $y = 0{,}6 - 0{,}3x$, де $-2 \leqslant x \leqslant 5$, з кроком, що дорівнює 1. Використовуючи цю таблицю, укажіть:

1) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює 0;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0.

739. Знайдіть значення функції для $x = -5$; $x = 0$; $x = 3$, якщо:

1) $y = \begin{cases} 4x - 3, & \text{якщо } x < 0, \\ -2x, & \text{якщо } x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 7, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ x^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

740. Знайдіть значення функції для значення аргументу, яке дорівнює -2; 0; 4, якщо:

1) $y = \begin{cases} 7x - 2, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ -3x, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 3, & \text{якщо } x \leqslant 2, \\ -x^2, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

741. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 + 2x + 5$.

Вправи для повторення

742. Обчисліть:

$$\frac{8}{15} \cdot 0,5625 - \left(\frac{11}{24} + 1\frac{13}{36}\right) \cdot 1,44 + 2\frac{8}{25}.$$

743. Якими одночленами треба заповнити клітинки, щоб рівність перетворилася на тотожність:

1) $(3x - 2y)(\square + \square) = 9x^2 - 4y^2$;
2) $(5m + \square)(5m - \square) = 25m^2 - 36$;
3) $(7c^2 - \square)(\square + 3p) = 49c^4 - 9p^2$;
4) $(4m + 9a^2)(\square - \square) = 81a^4 - 16m^2$?

744. Сторона квадрата на 4 см більша за одну сторону прямокутника і на 5 см менша за другу. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа на 10 см^2 більша за площу прямокутника.

Цікаві задачі для учнів неледачих

745. У трьох коробках лежать кульки: у першій – дві білого кольору, у другій – дві чорного кольору, у третій – білого й чорного. На коробках є таблички з написами, що відповідають кольору кульок: ББ, ЧЧ і БЧ, але вміст жодної з коробок не відповідає її табличці. Як, взявши з якоїсь однієї коробки навмання одну кульку, визначити колір кульок, що лежать у кожній з коробок?

Розділ 3. Лінійні рівняння та їх системи

У цьому розділі ви:
- **пригадаєте** основні властивості рівнянь з однією змінною;
- **ознайомитеся** з лінійними рівняннями з однією та двома змінними, системами двох лінійних рівнянь з двома змінними;
- **навчитеся** розв'язувати лінійні рівняння з однією змінною та рівняння, які до них зводяться; системи лінійних рівнянь з двома змінними; текстові задачі за допомогою рівнянь та їх систем; будувати графіки лінійних рівнянь з двома змінними.

§22. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО РІВНЯННЯ

Упродовж багатьох століть алгебра розвивалась як наука про рівняння.

***Рівнянням* називають рівність, що містить змінну.**

Основні відомості про рівняння ви вже знаєте з попередніх класів. Нагадаємо, що вираз, записаний в рівнянні ліворуч від знака рівності, називають *лівою частиною рівняння*, а вираз, записаний праворуч, – *правою частиною рівняння*. Якщо в рівняння $4x - 6 = x$ замість змінної x підставити число 2, то одержимо правильну числову рівність $4 \cdot 2 - 6 = 2$, оскільки числові значення обох частин рівняння стануть між собою рівними. У такому разі про число 2 кажуть, що воно *задовольняє рівняння*, тобто є його *коренем*.

Число, яке задовольняє рівняння, називають *коренем* або *розв'язком рівняння*.

Рівняння можуть мати різну кількість коренів. Наприклад, рівняння $4x - 6 = x$ має лише один корінь – число 2. Рівняння $x(x - 6) = 0$ має два корені – числа 0 і 6. Будь-яке значення змінної x задовольнятиме рівняння $x + 0{,}1 = 0{,}1 + x$, тому будь-яке число є його розв'язком, отже, це рівняння має безліч коренів. Але не існує жодного значення змінної x, яке б перетворювало рівняння $x + 1 = x$ у правильну числову рівність, оскільки при кожному значенні змінної x значення лівої частини рівняння буде на 1 перевищувати значення правої його частини. Тому рівняння $x + 1 = x$ не має коренів.

Розв'язати рівняння **– означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.**

Розглянемо рівняння $x + 1 = 5$ і $3x = 12$. Кожне з них має єдиний корінь – число 4. Ці рівняння є *рівносильними*.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і такі рівняння, які коренів не мають.

Приклад 1. З'ясувати, чи є рівносильними рівняння:
1) $18 - x = 11$ і $21 : x = 3$; 2) $x + 3 = x$ і $2 - x = 5 - x$;
3) $x + 3 = 4$ і $5x = 10$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Коренем рівняння $18 - x = 11$ є число 7. Коренем рівняння $21 : x = 3$ також є число 7. Тому рівняння $18 - x = 11$ і $21 : x = 3$ – рівносильні.

2) Обидва рівняння $x + 2 = x$ і $2 - x = 5 - x$ не мають коренів, тому є рівносильними.

3) Коренем рівняння $x + 3 = 4$ є число 1, а коренем рівняння $5x = 10$ – число 2. Тому рівняння $x + 3 = 4$ і $5x = 10$ не є рівносильними.

Під час розв'язування рівнянь використовують *властивості*, які перетворюють рівняння на рівносильні їм рівняння:

1) якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

Приклад 2. З'ясувати, чи є рівносильними рівняння:
1) $2(x - 1) = 5x$ і $2x - 2 = 5x$;
2) $3a + 2 = 5a - a - 7$ і $3a + 2 = 4a - 7$;

3) $5x = 2x + 9$ і $5x - 2x = 9$;

4) $0{,}5b = 1{,}5b - 3{,}5$ і $b = 3b - 7$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Рівняння $2(x - 1) = 5x$ і $2x - 2 = 5x$ є рівносильними, оскільки друге рівняння одержуємо з першого розкриттям дужок у його лівій частині.

2) Рівняння $3a + 2 = 5a - a - 7$ і $3a + 2 = 4a - 7$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо з першого зведенням подібних доданків у його правій частині.

3) Рівняння $5x = 2x + 9$ і $5x - 2x = 9$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо з першого перенесенням доданка з правої частини рівняння в ліву із зміною знака цього доданка на протилежний.

4) Рівняння $0{,}5b = 1{,}5b - 3{,}5$ і $b = 3b - 7$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо шляхом множення на 2 обох частин першого рівняння.

А ще раніше...

У IX ст. видатний арабський математик Мухаммед бен Муса аль-Хорезмі у своєму трактаті «Кітаб аль-джебр аль-мукабала» зібрав і систематизував існуючі на той час методи розв'язування рівнянь. Узятий з назви цієї книжки термін «аль-джебр» (у перекладі з арабської означає «відновлення») надалі почав уживатися як «алгебра» і дав назву цілій науці.

У ті часи, коли аль-Хорезмі писав свій трактат, від'ємні числа вважалися хибними, несправжніми. Тому коли від'ємне число переносили з однієї частини рівняння в іншу, змінюючи його знак, вважали, що воно «відновлюється» (стає додатним), тобто з несправжнього перетворюється на справжнє. Саме таке перетворення рівнянь аль-Хорезмі і назвав «відновленням».

Властивість взаємного знищення однакових доданків рівняння, що містилися в обох його частинах, аль-Хорезмі назвав «протиставленням» (арабською мовою – «аль-мукабал»).

Аль-Хорезмі був перший учений, хто відокремив алгебру від арифметики і розглянув її як окрему математичну науку. Алгебру аль-Хорезмі в латинському перекладі вивчали європейці протягом XII–XVI ст. Подальший розвиток алгебри пов'язаний саме з європейськими вченими, зокрема з італійськими математиками епохи Відродження.

До XIX ст. алгебра розвивалася як наука, що вивчає методи розв'язування рівнянь. Згодом вона значно збагатилася новими змістовими лініями: спрощення виразів, функції, розв'язування нерівностей тощо, і тепер рівняння – це лише одна зі складових частин алгебри.

Мухаммед бен Муса аль-Хорезмі
(783 – бл. 850)

Що називають рівнянням? Що називають коренем (або розв'язком) рівняння? Що означає розв'язати рівняння? Які рівняння називають рівносильними? Які властивості використовують під час розв'язування рівнянь?

831. (*Усно*) Який із записів є рівнянням (відповідь обґрунтуйте):

1) $7x - 21 > 0$; 2) $4x + 5$;
3) $7x - 2 = 10$; 4) $(12 - 10) \cdot 3 = 6$?

832. (*Усно*) Чи є число 3 коренем рівняння:

1) $2x = 6$; 2) $x - 7 = 4$;
3) $2x + 3 = 8$; 4) $27 : x = 9$?

833. Чи є число 2 розв'язком рівняння:

1) $x + 7 = 9$; 2) $5x = 12$;
3) $x - 8 = -6$; 4) $x : 4 = 2$?

834. Яке із чисел є коренем рівняння $x^2 = 2x + 3$:

1) 0; 2) –1; 3) 1; 4) 3?

835. Чи є коренем рівняння $x^2 = 4 - 3x$ число:

1) 0; 2) 1; 3) –2; 4) –4?

836. Доведіть, що кожне із чисел 1,3 та –1,3 є коренем рівняння $x^2 = 1{,}69$.

837. Чи є рівносильними рівняння:

1) $x + 2 = 5$ і $x : 3 = 1$; 2) $x - 3 = 7$ і $2x = 18$?

838. Чи є рівносильними рівняння:

1) $x - 2 = 3$ і $2x = 10$; 2) $x + 3 = 7$ і $x : 2 = 3$?

839. Доведіть, що:

1) коренем рівняння $2(x - 3) = 2x - 6$ є будь-яке число;
2) рівняння $y - 7 = y$ не має коренів.

840. Доведіть, що:

1) коренем рівняння $3(2 - c) = 6 - 3c$ є будь-яке число;
2) рівняння $x = x + 8$ не має коренів.

841. Складіть рівняння, що має:

1) єдиний корінь – число –2;
2) два корені – числа 5 і –5.

842. З'ясуйте, не розв'язуючи рівнянь, чи є вони рівносильними:

1) $4(x - 2) = 19$ і $4x - 8 = 19$;
2) $2x - 3 = 3x + 5$ і $2x - 3x = 5 + 3$;
3) $8(x - 3) = 40$ і $x - 3 = 5$;
4) $\frac{2x}{3} = 11$ і $2x = 33$.

843. Установіть, не розв'язуючи, чи є рівняння рівносильними:

1) $8(x - 1) = 5$ і $8x - 8 = 5$;
2) $3x + 7 = 4x - 8$ і $3x - 4x = -8 - 7$;
3) $9(x + 2) = 18$ і $x + 2 = 2$;
4) $-\frac{3x}{4} = 7$ і $-3x = 28$.

844. Чи має розв'язки рівняння:

1) $x + 2 = 2 - x$;
2) $x + 3 = 3 + x$;
3) $x + 1 = -1 + x$;
4) $0 \cdot x = 0$;
5) $0 \cdot (x - 1) = 3$;
6) $5(x - 1) = 5x - 5$;
7) $0 : x = 0$;
8) $2(x - 3) = 2x - 7$?

Вправи для повторення

845. Знайдіть значення виразу:

1) $4a + 12b + 8a$, якщо $a = -13$; $b = 13$;
2) $(3x - 2x)(5m + 4m)$, якщо $x = 1\frac{8}{9}$; $m = -1\frac{1}{2}$.

846. Спростіть вираз:

1) $64 - (8 - 3m)^2$;
2) $a^2b^2 - (ab + 7)^2$;
3) $t^2 + 25 - (t - 5)^2$;
4) $p^4 - 16 - (p^2 + 4)^2$.

Цікаві задачі для учнів неледачих

847. Яку остачу при діленні на 1001 дає число
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 2000$?

§23. ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Ми знаємо, як розв'язувати рівняння $2x = -8$; $-0{,}01x = 17$; $\frac{1}{3}x = 5$. Кожне із цих рівнянь має вигляд $ax = b$, де x – змінна, a і b – деякі числа.

Рівняння вигляду $ax = b$, де x – змінна, a і b – деякі числа, називають *лінійним рівнянням з однією змінною*.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Розділ 2.
ФУНКЦІЇ

Розділ 3.
ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ