БІБЛІОТЕЧКА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

О.С. Істер

# МАТЕМАТИЧНІ ПЕРЛИНИ

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
І89

*Серію «Бібліотечка фізико-математичної школи» засновано 2010 року*

**Істер О.С.**
І89 Математичні перлини. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. — 88 с.

**ISBN 978-966-10-2986-5**

У пропонованому посібнику представлено статті, що були в різні роки надруковані автором в періодичних спеціалізованих виданнях з математики.

Посібникмістить оригінальні задачі, серед яких багато авторських, та нові методи їх розв'язання

Для вчителів та учнів загальноосвітніх шкіл та профільних класів природничого та фізико-математичного спрямування.

ББК 22.1я72



ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)
ISBN 978-966-10-2986-5



# Від автора

У пропонованому посібнику представлено 10 статей, що були в різні роки надруковані автором в газеті «Математика» та журналі «Математика в школі».

Учні середньої та старшої школи знайдуть у книзі оригінальні задачі, серед яких багато авторських, та нові методи їхнього розв'язання. Колегам-вчителям, сподіваюсь, книга буде корисною для підготовки до уроків та для позакласної роботи.

Зауваження та пропозиції надсилайте на адресу: ister@i.com.ua.

Відвідайте наші сторінки в Інтернеті: www.bohdan-books.com та ister.in.ua.

## Статті, що ввійшли у книгу

| № | Назва статті | Де надрукована |
|---|---|---|
| 1 | Тригонометричні підстановки | «Математика» №8 за 1998 р. (початок) та «Математика» №9 за 1998 р. (закінчення) |
| 2 | Олімпіадні «ігри» з остачею від ділення | «Математика» №11 за 1999 р. |
| 3 | Багатозначні геометричні задачі | «Математика» №17 за 1999 р. |
| 4 | Обернені тригонометричні функції: самостійне плавання на вступному іспиті | «Математика в школі» №2 за 1998 р. |
| 5 | Задачі-близнюки | «Математика» №37 за 1999 р. |
| 6 | Формули переходу між кутами правильної піраміди | «Математика» №14 за 2000 р. (початок) та «Математика» №15 за 2000 р. (закінчення) |
| 7 | Текстові задачі на рух: кількість невідомих більша від кількості рівнянь | «Математика» №21–22 за 2000 р. |
| 8 | Математичний футбол | «Математика» №42 за 2000 р. |
| 9 | Розв'язування рівнянь, що містять комбінаторні вирази | «Математика» №7 за 2001 р. |
| 10 | Розв'язування комбінаторних задач за допомогою рівнянь | «Математика» №10 за 2001 р. |

## Тригонометричні підстановки

У класичному математичному аналізі тригонометричні підстановки використовуються для підінтегральних виразів, що містять радикали $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$, а також квадрати цих радикалів $a^2-x^2$, $x^2 \pm a^2$.

Зручними є:

для випадку $\sqrt{a^2-x^2}$ підстановка $x = a\sin t$ (або $x = a\cos t$),

для випадку $\sqrt{x^2+a^2}$ підстановка $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ (або $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$),

для випадку $\sqrt{x^2-a^2}$ підстановка $x = \dfrac{a}{\sin t}$ (або $x = \dfrac{a}{\cos t}$).

Ідея тригонометричної підстановки в шкільному курсі математики допомагає звести алгебраїчні вирази, рівняння, нерівності, тощо до тригонометричних. Зауважимо, що зручно накладати обмеження на $t$ так, щоб $x$ набував усіх можливих значень з області визначення лише один раз (тобто розглядати один інтервал монотонності відповідної тригонометричної функції).

Пропонуємо дев'ять авторських задач, найзручнішим способом розв'язання яких вважаємо метод тригонометричної підстановки.

Спочатку розглянемо задачі з однією змінною.

### 1. Підстановка $x = a\sin t$ (або $x = a\cos t$)

**Задача 1.** Розв'язати рівняння $x^3 + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

*Розв'язання.* Областю допустимих значень є $[-1; 1]$, тому можлива заміна змінної $x = \sin t$, де $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Тоді маємо: $\sin^3 t + |\cos t|^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Оскільки $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, то $\cos t \geq 0$ і $|\cos t| = \cos t$.

Отже, $(\sin t+\cos t)(\sin^2 t-\sin t\cos t+\cos^2 t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Замінимо $\sin t+\cos t=z$, тоді $z^2=1+2\sin t\cos t$, $\sin t\cos t=\dfrac{z^2-1}{2}$.

Маємо: $z\left(1-\dfrac{z^2-1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z^3-3z+\sqrt{2}=0$.

Домножимо обидві частини рівняння на $\left(\sqrt{2}\right)^3$.

Маємо: $\left(\sqrt{2}z\right)^3-6\left(\sqrt{2}z\right)+4=0$.

Виконаємо ще одну заміну: $\sqrt{2}z=u$.
$u^3-6u+4=0$; $\left(u^3-8\right)-\left(6u-12\right)=0$;
$(u-2)\left(u^2+2u+4\right)-6(u-2)=0$; $(u-2)\left(u^2+2u-2\right)=0$;
$u_1=2$; $u_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}$.

Тоді $z_1=\sqrt{2}$; $z_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Оскільки $\sin t+\cos t=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)=\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$, то маємо:

1) $\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$; $\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$; $t+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$;

$t=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \mathrm{Z}$.

Враховуючи, що $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, маємо $t=\dfrac{\pi}{4}$ і тоді $x=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$. Немає розв'язку.

3) $\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$;

$t=(-1)^n\arcsin\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}-\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ n\in Z$.



Враховуючи, що $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, маємо $t=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}-\dfrac{\pi}{4}$. Тоді

$$x=\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{4}-$$

$$-\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt[4]{3}}{4}.$$

*Відповідь.* $x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt[4]{3}}{4}$.

**Задача 2.** Розв'язати рівняння $8\sqrt{1-x^2}\left(2x^3-x\right)=1$.

*Розв'язання.* Оскільки областю допустимих значень рівняння є $[-1;1]$, то можлива заміна $x=\cos t$, де $t\in[0;\pi]$.

Тоді $8|\sin t|\cos t\left(2\cos^2 t-1\right)=1$.

Оскільки $t\in[0;\pi]$, то $\sin t\ge 0$ і $|\sin t|=\sin t$. Тоді

$4(2\sin t\cos t)\cos 2t=1$; $2(2\sin 2t\cos 2t)=1$; $\sin 4t=\dfrac{1}{2}$.

Отже,

$$\left[\begin{array}{l}4t=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \mathrm{Z},\\ 4t=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \mathrm{Z};\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in \mathrm{Z},\\ t=\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in \mathrm{Z}.\end{array}\right.$$

Враховуючи обмеження для $t$, маємо:

$$t_1=\frac{\pi}{24};\ t_2=\frac{13\pi}{24};\ t_3=\frac{5\pi}{24};\ t_4=\frac{17\pi}{24}.$$

Тоді

$$x_1=\cos\frac{\pi}{24}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}}{4}.$$

# Зміст