

БІБЛІОТЕЧКА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

О.С. Істер

# МАТЕМАТИЧНІ ПЕРЛИНИ



ТЕРНОПІЛЬ  
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72  
189

*Серію «Бібліотечка фізико-математичної школи» засновано 2010 року*

**Істер О.С.**  
189 Математичні перлини. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. — 88 с.  
**ISBN 978-966-10-2986-5**

У пропонованому посібнику представлено статті, що були в різні роки надруковані автором в періодичних спеціалізованих виданнях з математики.

Посібник містить оригінальні задачі, серед яких багато авторських, та нові методи їх розв'язання

Для вчителів та учнів загальноосвітніх шкіл та профільних класів природничого та фізико-математичного спрямування.

ББК 22.1я72

*Охороняється законом про авторське право.  
Жодна частина цього видання не може бути відтворена  
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)  
ISBN 978-966-10-2986-5

© Навчальна книга – Богдан, 2012

## Від автора

У пропонованому посібнику представлено 10 статей, що були в різні роки надруковані автором в газеті «Математика» та журналі «Математика в школі».

Учні середньої та старшої школи знайдуть у книзі оригінальні задачі, серед яких багато авторських, та нові методи їхнього розв'язання. Колегам-вчителям, сподіваюсь, книга буде корисною для підготовки до уроків та для позакласної роботи.

Зауваження та пропозиції надсилайте на адресу: [ister@i.com.ua](mailto:ister@i.com.ua).

Відвідайте наші сторінки в Інтернеті: [www.bohdan-books.com](http://www.bohdan-books.com) та [ister.in.ua](http://ister.in.ua).

## Статті, що ввійшли у книгу

№	Назва статті	Де надрукована
1	Тригонометричні підстановки	«Математика» №8 за 1998 р. (початок) та «Математика» №9 за 1998 р. (закінчення)
2	Олімпіадні «ігри» з остачею від ділення	«Математика» №11 за 1999 р.
3	Багатозначні геометричні задачі	«Математика» №17 за 1999 р.
4	Обернені тригонометричні функції: самостійне плавання на вступному іспиті	«Математика в школі» №2 за 1998 р.
5	Задачі-близнюки	«Математика» №37 за 1999 р.
6	Формули переходу між кутами правильної піраміди	«Математика» №14 за 2000 р. (початок) та «Математика» №15 за 2000 р. (закінчення)
7	Текстові задачі на рух: кількість невідомих більша від кількості рівнянь	«Математика» №21–22 за 2000 р.
8	Математичний футбол	«Математика» №42 за 2000 р.
9	Розв'язування рівнянь, що містять комбінаторні вирази	«Математика» №7 за 2001 р.
10	Розв'язування комбінаторних задач за допомогою рівнянь	«Математика» №10 за 2001 р.

## Тригонометричні підстановки

У класичному математичному аналізі тригонометричні підстановки використовуються для підінтегральних виразів, що містять радикали  $\sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $\sqrt{x^2 - a^2}$ ,  $\sqrt{x^2 + a^2}$ , а також квадрати цих радикалів  $a^2 - x^2$ ,  $x^2 \pm a^2$ .

Зручними є:

для випадку  $\sqrt{a^2 - x^2}$  підстановка  $x = asint$  (або  $x = acost$ ),

для випадку  $\sqrt{x^2 + a^2}$  підстановка  $x = atgt$  (або  $x = actgt$ ),

для випадку  $\sqrt{x^2 - a^2}$  підстановка  $x = \frac{a}{\sin t}$  (або  $x = \frac{a}{\cos t}$ ).

Ідея тригонометричної підстановки в шкільному курсі математики допомагає звести алгебраїчні вирази, рівняння, нерівності, тощо до тригонометричних. Зауважимо, що зручно накладати обмеження на  $t$  так, щоб  $x$  набував усіх можливих значень з області визначення лише один раз (тобто розглядати один інтервал монотонності відповідної тригонометричної функції).

Пропонуємо дев'ять авторських задач, найзручнішим способом розв'язання яких вважаємо метод тригонометричної підстановки.

Спочатку розглянемо задачі з однією змінною.

### 1. Підстановка $x = asint$ (або $x = acost$ )

**Задача 1.** Розв'язати рівняння  $x^3 + (\sqrt{1 - x^2})^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

*Розв'язання.* Областю допустимих значень є  $[-1; 1]$ , тому можлива заміна змінної  $x = sint$ , де  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Тоді маємо:  $\sin^3 t + |\cos t|^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Оскільки  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , то  $\cos t \geq 0$  і  $|\cos t| = \cos t$ .

$$\text{Отже, } (\sin t + \cos t)(\sin^2 t - \sin t \cos t + \cos^2 t) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Замінімо } \sin t + \cos t = z, \text{ тоді } z^2 = 1 + 2 \sin t \cos t, \sin t \cos t = \frac{z^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Маємо: } z \left( 1 - \frac{z^2 - 1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, z^3 - 3z + \sqrt{2} = 0.$$

Домножимо обидві частини рівняння на  $(\sqrt{2})^3$ .

$$\text{Маємо: } (\sqrt{2}z)^3 - 6(\sqrt{2}z) + 4 = 0.$$

Виконаємо ще одну заміну:  $\sqrt{2}z = u$ .

$$u^3 - 6u + 4 = 0; (u^3 - 8) - (6u - 12) = 0;$$

$$(u - 2)(u^2 + 2u + 4) - 6(u - 2) = 0; (u - 2)(u^2 + 2u - 2) = 0;$$

$$u_1 = 2; u_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

$$\text{Тоді } z_1 = \sqrt{2}; z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Оскільки } \sin t + \cos t = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \right) = \sqrt{2} \sin \left( t + \frac{\pi}{4} \right), \text{ то ма-}$$

ємо:

$$1) \sqrt{2} \sin \left( t + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}; \sin \left( t + \frac{\pi}{4} \right) = 1; t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Враховуючи, що } t \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \text{ маємо } t = \frac{\pi}{4} \text{ і тоді } x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2) \sqrt{2} \sin \left( t + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{-1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \sin \left( t + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}. \text{ Немає розв'язку.}$$

$$3) \sqrt{2} \sin \left( t + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \sin \left( t + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2};$$

$$t = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

Враховуючи, що  $t \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ , маємо  $t = \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{\pi}{4}$ . Тоді

$$x = \sin \left( \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left( \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) \cos \frac{\pi}{4} -$$

$$-\sin \frac{\pi}{4} \cos \left( \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)^2} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1 - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Відповідь. } x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; x_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{4}.$$

**Задача 2.** Розв'язати рівняння  $8\sqrt{1-x^2}(2x^3-x) = 1$ .

*Розв'язання.* Оскільки областю допустимих значень рівняння є  $[-1; 1]$ , то можлива заміна  $x = \cos t$ , де  $t \in [0; \pi]$ .

$$\text{Тоді } 8|\sin t| \cos t (2 \cos^2 t - 1) = 1.$$

Оскільки  $t \in [0; \pi]$ , то  $\sin t \geq 0$  і  $|\sin t| = \sin t$ . Тоді

$$4(2 \sin t \cos t) \cos 2t = 1; 2(2 \sin 2t \cos 2t) = 1; \sin 4t = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\begin{cases} 4t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, & \begin{cases} t = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ t = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \\ 4t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

Враховуючи обмеження для  $t$ , маємо:

$$t_1 = \frac{\pi}{24}; t_2 = \frac{13\pi}{24}; t_3 = \frac{5\pi}{24}; t_4 = \frac{17\pi}{24}.$$

Тоді

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{12}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}}{4}.$$

## Зміст

Від автора .....	3
Статті, що ввійшли у книгу .....	4
<b>Тригонометричні підстановки.....</b>	<b>5</b>
1. Підстановка $x = a \sin t$ (або $x = a \cos t$ ) .....	5
2. Підстановка $x = a \operatorname{tg} t$ (або $x = a \operatorname{ctg} t$ ) .....	8
3. Підстановка $x = \frac{a}{\sin t}$ (або $x = \frac{a}{\cos t}$ ) .....	10
4. Задачі з кількома змінними .....	12
<b>Олімпіадні «ігри» з остачею від ділення.....</b>	<b>16</b>
<b>Багатозначні геометричні задачі.....</b>	<b>23</b>
1. Основні властивості геометричних фігур .....	23
2. Суміжні та вертикальні кути.....	23
3. Ознаки рівності трикутників .....	24
4. Сума кутів трикутника .....	24
5. Геометричні побудови.....	24
<b>Обернені тригонометричні функції:</b>	
<b>самостійне плавання на вступному іспиті.....</b>	<b>30</b>
1. Основні властивості обернених тригонометричних функцій. 30	
2. Обчислення значень виразів, що містять обернені тригонометричні функції .....	32
3. Рівняння .....	34
4. Нерівності .....	36
Вправи для самостійного виконання .....	38
Відповіді .....	39
<b>Задачі-близнюки .....</b>	<b>40</b>
<b>Формули переходу між кутами правильної піраміди .....</b>	<b>43</b>
Вправи .....	53
Відповіді .....	55

<b>Текстові задачі на рух: кількість невідомих більша від кількості рівнянь.....</b>	<b>56</b>
Вправи .....	65
Відповіді .....	66
<b>Математичний футбол (сценарій гри) .....</b>	<b>67</b>
1-й тайм .....	68
2-й тайм .....	70
Пенальті .....	72
<b>Розв'язування рівнянь, що містять комбінаторні вирази.....</b>	<b>73</b>
Вправи .....	80
Відповіді .....	80
<b>Розв'язування комбінаторних задач з допомогою рівнянь.....</b>	<b>81</b>
Вправи .....	85
Відповіді .....	85