БІБЛІОТЕЧКА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

О.С. Істер

АркфункціЯ: від А до Я

Видання друге

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
І89

Серію «Бібліотечка фізико-математичної школи» засновано 2010 року

Істер О.С.
І89 АркфункціЯ: від А до Я. Вид. друге. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. — 176 с.

ISBN 978-966-10-2985-8

Книга присвячена оберненим тригонометричним функціям .У книзі міститься біля 900 таблиць, формул, прикладів, задач , що дозволить читачеві позбутися затруднень при роботі з аркфункціями.

Для вчителів та учнів загальноосвітніх шкіл та профільних класів природничого та фізико-математичного спрямування.

ББК 22.1я72

ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)
ISBN 978-966-10-2985-8

Передмова

Обернені тригонометричні функції (інші назви: ***аркфункції*** або ***аркус-функції***) входять до сучасних шкільних програм з математики усіх рівнів.

На *рівні стандарту* і *академічному рівні* обернені тригонометричні функції є лише інструментом для запису відповіді у тригонометричних рівняннях. На *профільному* та *поглибленому рівнях* передбачено вміння учнів будувати графіки обернених тригонометричних функцій, розв'язувати рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції тощо.

Завдання, які містять обернені тригонометричні функції є традиційно складними для розв'язування. Завдання типу:

«Обчислити $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{7}{25}\right)-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$»,

або

«Розв'язати рівняння $\arcsin x+\arcsin\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}$»

викликають значні труднощі при розв'язуванні в учнів, вчителів, викладачів вищих навчальних закладів.

Автор сподівається, що ця книга, в якій біля 900 таблиць, формул, прикладів, задач, дозволить позбутися шановному читачеві «аркусофобії». Більшість вправ містить два приблизно рівних за складністю завдання (а) і б)), що полегшить учителю підбір дидактичного матеріалу.

Зауваження та пропозиції надсилайте на адресу: ister@i.com.ua.

Відвідайте наші сторінки в Інтернеті: www.bohdan-books.com та ister.in.ua.

Розділ 1

Обернені тригонометричні функції. Основні тотожності

§1. Обернена функція

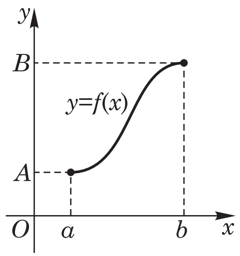

Рис. 1.1

Розглянемо функцію $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, областю значень якої є відрізок $[A; B]$. При цьому функція $f(x)$ кожного свого значення $y \in [A; B]$ набуває тільки в одній точці (рис. 1.1). Така функція називається ***однозначною***. З рівності $y = f(x)$ як з рівняння знайдемо x: $x = g(y)$. Ця функція $x = g(y)$ називається ***оберненою*** для функції $f(x)$. Оскільки в шкільній математиці прийнято позначати аргумент через x, а функцію — через y, остаточно одержимо $y = g(x)$.

Достатня умова існування оберненої функції. Якщо функція $y = f(x)$, $x \in D$, монотонна на проміжку D, то вона має обернену.

Зауважимо, що монотонність не є необхідною умовою для існування оберненої функції. Це зауваження ілюструє наступний приклад .

Задача 1. Знайти функцію, обернену для функції $y = \dfrac{1}{x}$, при $x \neq 0$.

Розв'язання. Функція $y = \dfrac{1}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$. Розв'язавши рівняння $y = \dfrac{1}{x}$ відносно x, одержимо $x = \dfrac{1}{y}$.

Остаточно (перейменувавши змінні) $y = \dfrac{1}{x}$ — обернена до функції $y = \dfrac{1}{x}$.

Корисними є наступні ***властивості оберненої функції***.

1. Якщо функція $y = f(x)$ має область визначення $D(y) = D$ і область значень $E(y) = E$, то обернена для даної функція $g(x)$ має область визначення $D(y) = E$ і область значень $E(y) = D$.

2. $g\big(f(x)\big) = x,\ x \in D;\ f\big(g(x)\big) = x,\ x \in E.$

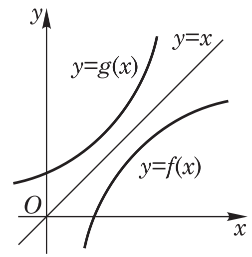

Рис. 1.2

3. Якщо функція $y = f(x)$, $x \in D$, монотонна на проміжку D і областю її значень є проміжок E, то обернена функція $y = g(x)$, $x \in E$, монотонна на проміжку E. Причому, якщо функція f зростає (спадає) на проміжку D, то і функція g теж зростає (спадає) на проміжку E.

4. Графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ симетричні відносно прямої $y = x$ (рис. 1.2).

Розглянемо приклади знаходження оберненої функції.

Задача 2. Для функції $y = 3x - 5$ знайти обернену функцію.

Розв'язання. Дана функція є зростаючою і визначена на всій числовій осі. Значить обернена функція існує і зростає. Виразивши x через y, одержимо $x = \dfrac{y+5}{3}$. Отже, одержимо $y = \dfrac{x+5}{3}$. Побудувавши графіки функцій $y = 3x - 5$ і $y = \dfrac{x+5}{3}$ переконаємось в їхній симетричності відносно прямої $y = x$ (рис. 1.3).

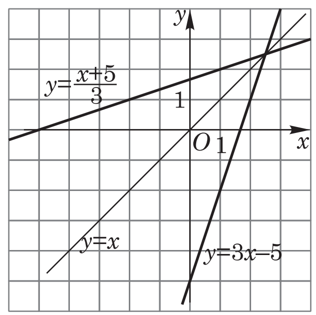

Рис. 1.3

У наступних прикладах надаємо читачеві можливість побудувати графіки прямої і оберненої функцій та переконатися в їхній симетричності відносно прямої $y = x$.

Задача 3. Знайти обернену функцію для функції $y = \dfrac{x}{x+1}$, $x \neq -1$.

Розв'язання. Оскільки на інтервалі $(-\infty; -1)$ функція монотонно зростає від 1 до $+\infty$, а на $(-1; +\infty)$ монотонно зростає від $-\infty$ до 1, то на всій осі, окрім $y = 1$, існує єдина обернена функція, яку знаходимо, розв'язавши рівняння $y = \dfrac{x}{x+1}$ відносно x. Одержимо $x = \dfrac{y}{1-y}$. Остаточно $y = \dfrac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

Задача 4. Знайти обернену функцію для:
а) $y = x^2 - 1$, $x \in [0; +\infty)$;
б) $y = x^2 - 1$, $x \in (-\infty; 0]$.

Розв'язання. а) На інтервалі $[0; +\infty)$ функція $y = x^2 - 1$ монотонно зростає від -1 до $+\infty$, тому має обернену. Знайдемо її. Маємо $x^2 = y + 1$; $|x| = \sqrt{y+1}$. Враховуючи той факт, що $x \geq 0$, остаточно одержимо $y = \sqrt{x+1}$.

б) На інтервалі $(-\infty; 0]$ функція $y = x^2 - 1$ монотонно спадає від $+\infty$ до -1. Міркуючи так само, як у пункті а), і враховуючи те, що $x \leq 0$, одержимо обернену функцію $y = -\sqrt{x+1}$.

Задача 5. Знайти обернену функцію для $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання. На своїй області визначення $[0; +\infty)$ функція $y = \sqrt{x}$ зростає від 0 до $+\infty$. Тому має обернену. З рівняння $x = y^2$, перейшовши до традиційних позначень, знаходимо функцію, обернену даній: $y = x^2$ для $x \geq 0$.

Задача 6. Знайти обернену функцію для $y = \sqrt{x+3}$, $x \in [1; 22]$.

Розв'язання. На $[1; 22]$ функція $y = \sqrt{x+3}$ зростає від 2 до 5. Маємо обернену функцію $y = x^2 - 3$, $x \in [2; 5]$.

Задача 7. Знайти обернену функцію для $y = 5^x$.

Розв'язання. Для монотонно зростаючої на $(-\infty; +\infty)$ $y = 5^x$ маємо $\log_5 y = x$; $y = \log_5 x$ — обернена функція.

Задача 8. Знайти обернену функцію для $y = \log_{\frac{1}{7}} x^2$, $x \in (-\infty; 0)$.

Розв'язання. На проміжку $(-\infty; 0)$ функція $y = \log_{\frac{1}{7}} x^2$ зростає від $-\infty$ до $+\infty$. Знайдемо обернену функцію; потенціюючи, одержимо $\left(\dfrac{1}{7}\right)^y = x^2$; $x = \pm\sqrt{\left(\dfrac{1}{7}\right)^y}$.

Враховуючи те, що $x < 0$, остаточно одержимо $y = -\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\frac{x}{2}}$.

Задача 9. Чи може функція співпадати зі своєю оберненою?

Розв'язання. Так, наприклад, $y = x$; $y = 1 - x$; $y = \dfrac{1}{x}$; $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ і т.ін.

Задача 10. Якщо функція не співпадає зі своєю оберненою, то чи можуть графіки прямої і оберненої функцій перетинатися не на прямій $y = x$?

Розв'язання. Так. Функції $y = \log_{\frac{1}{16}} x$ і $y = \left(\dfrac{1}{16}\right)^x$ є взаємно оберненими. Проте графіки цих функцій перетинаються в точках $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$ і $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$, які не лежать на прямій $y = x$. Зауважимо, що третя точка перетину графіків належить указаній прямій.

Вправи

Знайти обернені для наступних функцій:

1. а) $y = 3x + 5$; б) $y = 2x + 3$.
2. а) $y = x^2 + 5$, $x \geq 0$; б) $y = x^2 - 4$, $x \leq 0$.
3. а) $y = \sqrt{x+1}$; б) $y = \sqrt{2x-1}$.
4. а) $y = 3x - 2$, $x \in [1; 8]$; б) $y = x - 5$, $x \in [0; 2]$.
5. а) $y = \dfrac{1-x}{x}$, $x \in (0; +\infty)$; б) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$, $x \in (-\infty; 2)$.
6. а) $y = 2^{x-1}$; б) $y = 3^{x+2}$.
7. а) $y = \lg(x - 3)$; б) $y = \ln(x + 8)$.

Відповіді

§1. **1.** а) $y=\frac{x-5}{3}$; б) $y=\frac{x-3}{2}$. **2.** а) $y=\sqrt{x-5}$; б) $y=-\sqrt{x+4}$. **3.** а) $y=x^2-1,\ x\geq 0$; б) $y=\frac{x^2+1}{2},\ x\geq 0$. **4.** а) $y=\frac{x+2}{3},\ x\in[1;\ 22]$; б) $y=x+5,\ x\in[-5;-3]$. **5.** а) $y=\frac{1}{x+1},\ x\in(-1;+\infty)$; б) $y=\frac{1+2x}{x-1},\ x\in(-\infty;\ 1)$.
6. а) $y=1+\log_2 x$; б) $y=\log_3 x-2$. **7.** а) $y=10^x+3$; б) $y=e^x-8$.

§2. **1.** а) II; б) IV. **2.** а) >; б) >. **3.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **4.** а) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) 0.
5. а) $y=\frac{\cos x}{\pi}$; б) $y=3\sin x$. **6.** а) $y=\frac{\arcsin x}{2}+\frac{\pi}{8}$; б) $y=2\arccos x$.

§3. **1.** а) I; б) II. **2.** а) <; б) <. **3.** а) 0; б) 0. **4.** а) $-\sqrt{3}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** а) –1; б) 0,75. **6.** а) 0,5; б) 0,5625. **7.** а) $2\frac{5}{6}$; б) $-\frac{4}{7}$. **8.** а) 1; $x=\frac{\pi}{4}$; б) 1; $x=\frac{\pi}{4}$.

§4. **1.** а) $D=R$; б) $D=R$. **2.** а) $D=[0;+\infty)$; б) $D=(0;+\infty)$. **3.** а) $D=[2;\ 6]$; б) $D=[1;\ 4]$. **4.** а) $D=[-1;\ 0{,}5]$; б) $D=R$. **5.** а) $D=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$; б) $D=\left[-\frac{1}{3};1\right]$. **6.** а) $D=[-2;\ 1]$; б) $D=[-0{,}4;\ 1]$. **7.** а) $D=[-2;\ 3]$; б) $D=[6;\ 7]$. **8.** а) $D=[1;\ 4]$; б) $D=[1;\ 3)$. **9.** а) $D=[-6;\ 2)\cup(3;\ 8]$; б) $D=[-1;\ 2)$.
10. а) $D=[-3;\ 4]$; б) $D=\left[-3;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2};11\right]$. **11.** а) $\varnothing$; б) $D=(2;\ 8]$.
12. а) $D=\left[\frac{1}{4};\frac{5}{2}\right]$; б) $D=[1;\ 100]$.

13. а) $D=\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+\pi k\right],\ k\in Z$; б) $D=\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right],\ k\in Z$.
14. а) $D=(\pi;\ 4]$; б) $D=\left[1;\ \frac{3\pi}{2}\right]$. **15.** а) $x=k$, де $k\in Z$; б) $x\leq 0$, але $x\neq k,\ k\in Z$. **16.** а) Непарна; б) непарна. **17.** а) Ні парна, ні непарна; б) ні парна, ні непарна. **18.** а) Непарна; б) непарна. **19.** а) $E=[0;\ \pi]$, $M=\pi$, $m=0$; б) $E=\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, $M=\frac{\pi}{2}$, $m=-\frac{\pi}{2}$. **20.** а) $E=\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$, $M=0$, $m=-\frac{\pi}{2}$; б) $E=\left[\frac{\pi}{8};\ \frac{3\pi}{8}\right]$, $M=\frac{3\pi}{8}$, $m=\frac{\pi}{8}$. **21.** а) $E=\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $M=\frac{\pi}{2}$, $m=0$; б) $E=\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, $M=\pi$, m — не існує. **22.** а) $E=[0;\ 2\pi]$, $M=2\pi$, $m=0$; б) $E=[\pi;\ 3\pi]$, $M=3\pi$, $m=\pi$. **23.** а) $E=\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, M і m — не існують; б) $E=\left[\frac{\pi}{4};\ \pi\right)$, M — не існує, $m=\frac{\pi}{4}$.
24. а) $E=\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$, $M=2$, $m=\frac{1}{2}$; б) $E=[2;\ 8]$, $M=8$, $m=2$.

§5. **1.** а) $5-2\pi$; б) $13-4\pi$. **2.** а) $\pi-3$; б) $\pi-4$. **3.** а) 0; б) π. **4.** а) $4\pi-10$; б) $6\pi-16$. **5.** а) $\frac{2\pi}{5}$; б) $\frac{2\pi}{3}$. **6.** а) $\frac{9\pi}{14}$; б) $\frac{7\pi}{8}$. **7.** а) $\frac{11\pi}{18}$; б) $-\frac{\pi}{5}$. **8.** а) 1; б) $\pi-1$. **9.** а) $\pi-2$; б) $\pi-2$. **10.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{3\pi}{7}$. **11.** а) $34-11\pi$; б) $2\pi-7$. **12.** а) $\frac{7\pi}{8}$; б) $\frac{4\pi}{9}$. **13.** а) $\frac{\pi}{14}$; б) $\frac{7\pi}{18}$. **14.** а) $\frac{5\pi}{2}-5$; б) $\frac{\pi}{10}$.
15. а) $8\pi-25$; б) 0.

§6. **1.** а) $\arcsin\frac{5}{13}$; $\arcsin\frac{8}{17}$; $\arcsin\frac{21}{29}$; б) $\arccos\frac{56}{65}$; $\arccos 0{,}8$; $\arccos\frac{65}{97}$. **2.** а) $\mathrm{arctg}\frac{35}{12}$; $\mathrm{arctg}\frac{60}{11}$; $\mathrm{arctg}\frac{16}{63}$; б) $\mathrm{arcctg}\frac{40}{9}$; $\mathrm{arcctg}\frac{5}{12}$; $\mathrm{arcctg}\frac{8}{15}$. **3.** а) $\arccos\frac{4}{5}$; $\mathrm{arctg}\frac{3}{4}$; $\mathrm{arcctg}\frac{4}{3}$; б) $-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)-\pi$. **4.** а) $\arcsin\frac{5}{13}$; $\mathrm{arctg}\frac{5}{12}$; $\mathrm{arcctg}\frac{12}{5}$;

$\frac{\sqrt{2}}{2} \le |a| \le 1$, то розв'язків не має; якщо $|a| > 1$ — немає змісту; б) якщо $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, то $x = \sqrt{1-4a^2}$; якщо $a \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right)$ — розв'язків не має; якщо $|a| > \frac{1}{2}$ — немає змісту. **4.** а) якщо $a \in (0; \pi]$, то $x = \cos a$; якщо $a \in [-2\pi; 0)$, то $x = \cos\frac{a}{2}$; якщо $a \in (-\infty; -2\pi) \cup \{0\} \cup (\pi; +\infty)$ — розв'язків не має; б) якщо $a \in (0; 2\pi]$, то $x = \cos\frac{a}{2}$; якщо $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $x = \cos 2a$; якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \{0\} \cup (2\pi; +\infty)$ — розв'язків не має. **5.** $a = -\frac{9}{4}$. **6.** якщо $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; якщо $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в інших випадках — розв'язків не має. **7.** якщо $a \in (0; 2)$, то $x = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}$; якщо $a \notin (0; 2)$, то розв'язків не має. *Вказівка.* Доведіть, що якщо $x \in (-1; 1)$, то $\mathrm{arctg}\frac{1}{x-1} - \mathrm{arctg}\frac{1}{x+1} \le -\frac{\pi}{2}$. **8.** Якщо $a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $x = \mathrm{tg}\, a$, $y = 2$; $z = \ln(2a-1)$; при інших a розв'язків не має. **9.** Якщо $a = 1$, то $x = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\left(1-\sqrt{7}\right)$; $y = \cos\frac{\pi}{4}\left(1+\sqrt{7}\right)$; при інших цілих a розв'язків не має.

§20. 1. а) Рис. 20.1(а); б) рис. 20.1(б). **2.** а) Рис. 20.2(а); б) рис. 20.2(б). **3.** а) Рис. 20.3(а); б) рис. 20.3(б). **4.** а) Рис. 20.4(а); б) рис. 20.4(б). **5.** а) Рис. 20.5(а); б) Рис. 20.5(б). **6.** а) $y = \frac{\pi}{2} + \arccos x$;

б) $y = 2\,\mathrm{arctg}\, x - \frac{\pi}{2}$. **7.** а) Рис. 20.7(а); б) рис. 20.7(б).

8. а) $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } 0 < x \le 1, \\ -x, & \text{якщо } -1 \le x < 0; \end{cases}$

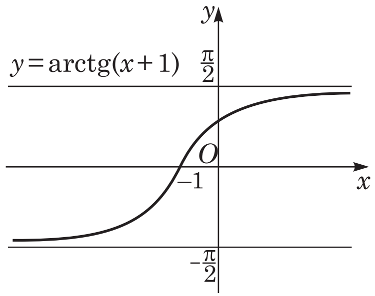

Рис. 20.1(а)

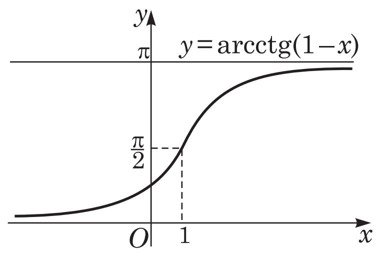

Рис. 20.1(б)

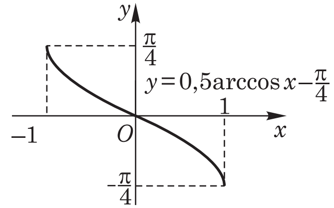

Рис. 20.2(а)

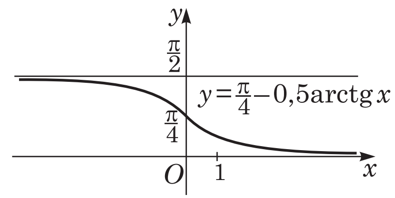

Рис. 20.2(б)

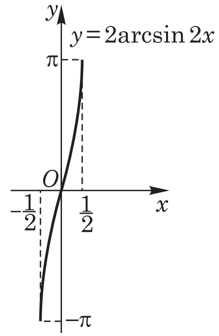

Рис. 20.3(а)

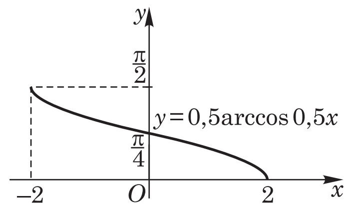

Рис. 20.3(б)

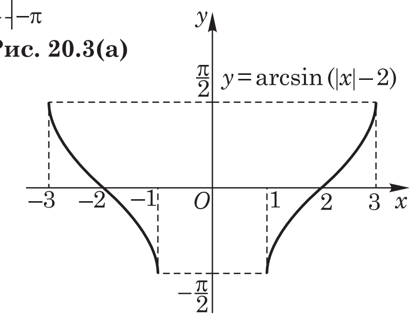

Рис. 20.4(а)

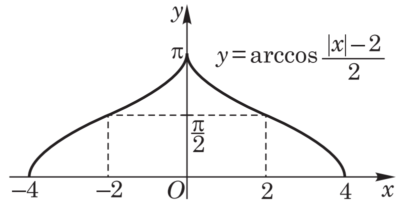

Рис. 20.4(б)

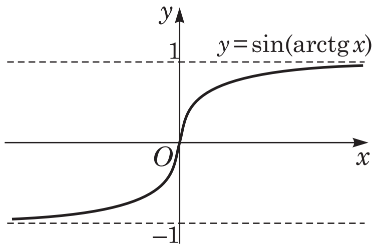

Рис. 20.16(б)

§21. 1. а) Рис. 21.1(а); б) рис. 21.1(б). **2.** а) Рис. 21.2(а); б) вітка гіперболи $y=\frac{1}{x}$, розміщена в I чверті. **3.** а) Рис. 21.3(а); б) вітка гіперболи $y=-\frac{1}{x}$, розміщена в IV чверті.

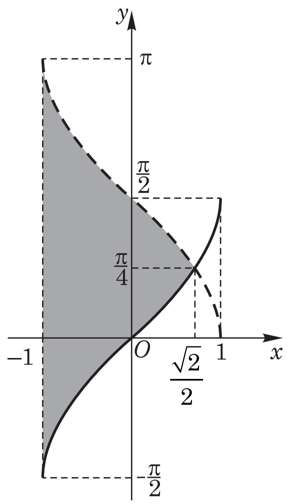

Рис. 21.1(а)

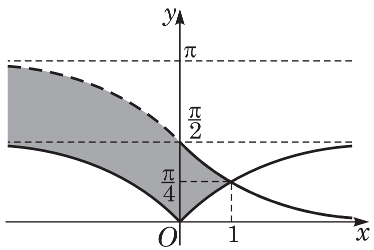

Рис. 21.1(б)

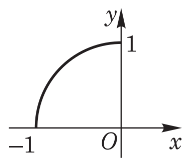

Рис. 21.2(а)

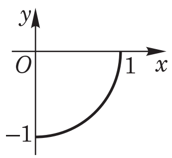

Рис. 21.3(а)

Зміст